

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

परिचय (Introduction)

- वास्तविक संख्या की भूमिका (Role of real numbers)
- भाज्यता (Divisibility)
- यूक्लिड विभाजन प्रमेय (Euclid's division lemma)
- यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (Euclid's division Algorithm)
- अभाज्य गुणनखंड (Prime factorisation)
- अभाज्य गुणनखंड द्वारा HCF & LCM (HCF & LCM using Prime factorisation)
- अंकगणित का आधारभूत प्रमेय (Fundamental theorem of Arithmetic)
- परिमेय / अपरिमेय संख्या (Rational & irrational Numbers)
- परिमेय संख्याओं का दशमलव विस्तार (Decimal Expansion of Rational number)

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

यूक्लिड विभाजन प्रमेय (Euclid's Division Lemma)

प्रमेय: यदि a और b दो धनात्मक पूर्णांक हैं, तो दो ऐसे अद्वितीय पूर्णांक q और r विद्यमान होते हैं कि

$$a = bq + r,$$

जहाँ $0 \leq r < b$ है।

अर्थात् धनात्मक पूर्णांक a और b के प्रत्येक युग्म के लिए ऐसे पूर्णांक q और r ज्ञात कर सकते हैं कि

$$a = bq + r, 0 \leq r < b \text{ है।}$$

यह भी ध्यान रहे कि q या r शून्य भी हो सकते हैं।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (Euclid's Division Algorithm)

निम्नलिखित चरणों का अनुसरण कर सकते हैं:

चरण (I) पूर्णांक a और b के लिए यूक्लिड की विभाजन प्रमेय का प्रयोग करके पूर्णांक q_1 तथा r_1 इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि

$$a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b \text{ हो।}$$

चरण (II) यदि $r_1 = 0$ है, तो a तथा b का महत्तम समापवर्तक b है।

चरण (III) यदि $r_1 \neq 0$ है, तो b तथा r_1 के लिए यूक्लिड की विभाजन प्रमेय का प्रयोग करके पूर्णांक q_2 तथा r_2 इस प्रकार प्राप्त कीजिए कि

$$b = r_1q_2 + r_2 \text{ हो।}$$

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (Euclid's Division Algorithm)

चरण (IV)

यदि $r_2 = 0$ है, तो a तथा b का महत्तम समापवर्तक r_1 है।

चरण (V)

यदि $r_2 \neq 0$ है, तो यूक्लिड की विभाजन प्रमेय का r_1 तथा r_2 पर प्रयोग करते जाएं तथा उपरोक्त प्रक्रिया निरंतर करते जाएं जब तक शेषफल शून्य न हो जाए।

इस स्थिति में प्राप्त भाजक ही वांछित महत्तम समापवर्तक (HCF) होगा।

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.1 (Exercise)

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए:

(i) 135 और 225

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.1 (Exercise)

प्रश्न 1. (ii) 867 और 255

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.1 (Exercise)

प्रश्न 2. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

प्रश्नावली 1.1 (Exercise)

प्रश्न 4. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m + 1$ के रूप का होता है।

प्रश्नावली 1.1 (Exercise)

प्रश्न 5. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m, 9m + 1$ या $9m + 8$ के रूप का होता है।

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.1 (Exercise)

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

उदाहरण (Example)

प्रश्न 5. संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। जाँच कीजिए कि क्या n का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होता है।

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

उदाहरण (Example)

प्रश्न 7. अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

उदाहरण (Example)

प्रश्न 8. संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.3 (Exercise)

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.4 (Exercise)

प्रश्न 1. बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं :

(i) $13/3125$

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.4 (Exercise)

(ii) $17/8$

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.4 (Exercise)

(iii) 64/455

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.4 (Exercise)

(iv) 15/1600

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.4 (Exercise)

(v) 29/343

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.4 (Exercise)

(vi) $23/2^3 5^2$

कक्षा 10वीं - गणित - वास्तविक संख्याएँ (पाठ 1)

प्रश्नावली 1.4 (Exercise)

प्रश्न 3. कुछ वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार नीचे दर्शाए गए हैं। प्रत्येक स्थिति के लिए निर्णय कीजिए कि वह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है और p/q के रूप में है, तो q के अभाज्य गुणनखंडों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(i) 0.120120012000120000...